

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НОРМИРОВКИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ УСТРОЙСТВ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ТИПА

© 2016 г. В.Г. БАРТЕНЕВ

Московский технологический университет (МИРЭА)  
e-mail: bartenev\_v@mirea.ru

### Введение

В данном докладе рассматривается два устройства корреляционного типа, в которых используются умножители накопители. Прежде всего, это устройство с алгоритмом оценки максимального правдоподобия (ОМП) модуля коэффициента корреляции, затем с упрощенным алгоритмом оценки с умножителем и когерентным накопителем, отличающееся отсутствием нормировки сигналов к мощности помехи. В некотором смысле это типовые устройства, входящие в состав различных радиотехнических систем [1,2,3]. Как правило, их анализ эффективности производился с помощью статистического моделирования, так как нелинейная операция умножения приводит к изменению вида распределений на выходе этих устройств и существенному усложнению их анализа с помощью аналитических выкладок. Однако если при нахождении характеристик обнаружения точность расчета вероятности правильного обнаружения допускает моделирование, то для малых вероятностей ложных тревог точность расчета с помощью статистического моделирования становится недопустимо низкой. По этой причине и была предпринята попытка впервые найти аналитические выражения для расчета низких вероятностей ложных тревог для нелинейных устройств корреляционного типа при использовании малых выборок наблюдений.

### Вероятность превышения порога огибающей шума на выходе умножителя с когерентным накоплением с нормировкой

В качестве первого алгоритма с умножителем на входе будет рассмотрен способ сравнения с порогом оценки максимального правдоподобия (ОМП) модуля коэффициента корреляции в соответствии с ниже приведенной формулой. В числителе (1) производится умножение с когерентным накоплением, а в знаменателе нормировка к мощности входных сигналов.

$$\hat{R} = \frac{(\sum_{j=1}^N Z1_j * Z2_j^*)}{(\sum_{j=1}^N Z1_j * Z1_j^*) * (\sum_{j=1}^N Z2_j * Z2_j^*)} = \frac{\sqrt{(\sum_{j=1}^N x1_j * x2_j + y1_j * y2_j)^2 + (\sum_{j=1}^N x2_j * y1_j - x1_j * y2_j)^2}}{\sqrt{(\sum_{j=1}^N x1_j * x1_j + y1_j * y1_j) * (\sum_{j=1}^N x2_j * x2_j + y2_j * y2_j)}} \quad (1)$$

где  $\hat{R}$  - оценка модуля коэффициента корреляции,  $N$  - число накоплений по независимым выборкам.  $Z1_j = x1_j + iy1_j$ ,  $Z2_j = x2_j + iy2_j$  комплексные выборки сигналов на входе умножителя разнесенных по времени или частоте в виде аддитивной смеси шума и коррелированного сигнала. Квадратурные компоненты шума имеют нормальное распределение, при этом их дисперсия равна 1 и среднее 0.

Для нахождения вероятности ложной тревоги на выходе данного устройства с

помощью распределения оценки модуля коэффициента корреляции  $\hat{R}$  нужно воспользоваться распределением Уишарта. В работе [4] получено такое распределение

$$W(\hat{R}) = \frac{2(1-\hat{R}^2)^N \hat{R}^{2N-2}}{\pi \Gamma(N) \Gamma(N-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{R}^2)^k \Gamma^2(N+k)}{\Gamma^2(k+1)} \quad (2)$$

Пороги для заданной вероятности ложной тревоги при воздействии шума найдем аналитически для  $R = 0$ . Очевидно, что для  $R = 0$  распределение (2) можно представить в более простом виде

$$W(\hat{R}) = 2(\hat{R})^{2N-2} (1-\hat{R}^2)^{N-1} \quad (3)$$

Используя (3), можно получить формулу для вероятности ложной тревоги  $F$ , как вероятность превышения  $\hat{R}$  порога  $L$ .

$$F(L) = (1-L^2)^{N-1} \quad (4)$$

Для верификации данной формулы было проведено моделирование этого устройства с расчетом  $F$  для разных значений порога  $L$  и  $N = 8$  (см. рис. 1). Результаты моделирования хорошо совпадают с аналитическими расчетами для невысоких порогов.

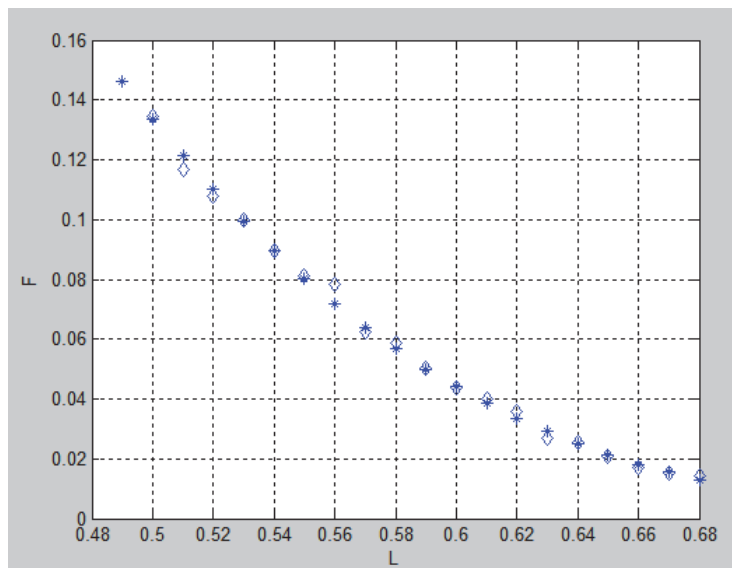


Рис. 1. Зависимость вероятности ложной тревоги  $F$  от порога  $L$  для  $N = 8$  в устройстве с ОМП (звездочки - аналитика, ромбики - моделирование).

Ниже приводится табл. 1 пороги  $L$  для оптимального обнаружителя при разных  $N$

Таблица 1

$F \setminus N$	8	16	32
$10^{-1}$	0,534	0,377	0,267
$10^{-4}$	0,855	0,677	0,507

Важно подчеркнуть, что благодаря нормировке пороги для данного устройства не зависят от мощности шума на входе, т.е. данный алгоритм обладает свойством стабилизации вероятности ложной тревоги.

**Вероятность превышения порога огибающей шума на выходе умножителя с когерентным накоплением без нормировки**

Упростим алгоритм (1), применив только умножитель с когерентным накоплением, т.е. исключив из знаменателя алгоритма ОМП достаточно трудоемкую операцию нормировки, как это следует из формулы (5)

$$\hat{R}_y = \left| \left( \sum_{j=1}^N Z1_j * Z2_j^* \right) \right| = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^N x1_j * x2_j + y1_j * y2_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^N x2_j * y1_j - x1_j * y2_j \right)^2} \quad (5)$$

Данный алгоритм был рассмотрен в [5], где было получено выражение для распределения оценки  $\hat{R}_y$  для шумовой выборки

$$W(\hat{R}_y) = \frac{\hat{R}_y^{N-1} K_{N-1}(\hat{R}_y)}{2^{N-1} \Gamma(N)} \quad (6)$$

В данное распределение входит гамма функция  $\Gamma(N)$  и модифицированная функция Бесселя  $K_{N-1}(\hat{R}_y)$  порядка  $N - 1$ . Из (6) можно получить выражение для вероятности ложной тревоги

$$F_y(L) = \frac{L^N K_N(L)}{2^{N-1} \Gamma(N)} \quad (7)$$

Для верификации данной формулы было проведено моделирование корреляционного обнаружителя с расчетом  $F_y$  для разных значений порога  $L$  и  $N = 8$  (см. рис. 2). Результаты моделирования достаточно хорошо совпадают с аналитическими расчетами.

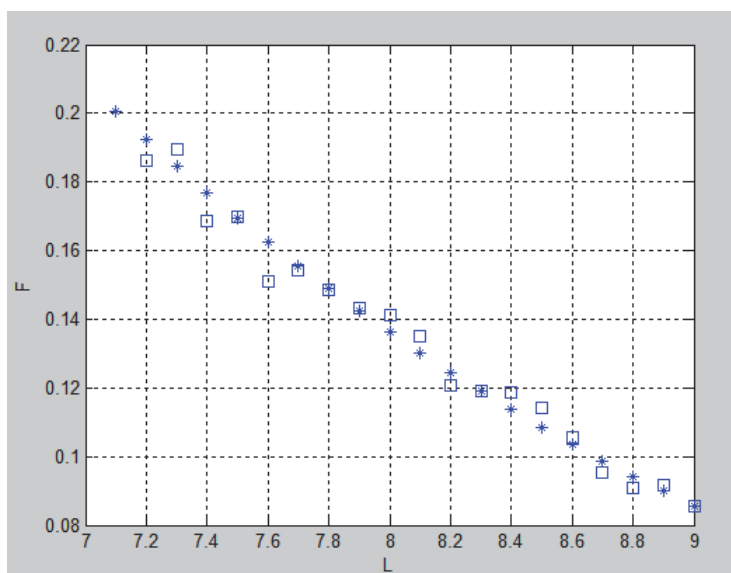


Рис. 2. Зависимость вероятности ложной тревоги  $F$  от порога  $L$  для  $N = 8$  в упрощенном обнаружителе (звездочки - аналитика, квадратики - моделирование).

Ниже приводится табл. 2 порогов  $L$  для упрощенного алгоритма при разных  $N$

Таблица 2

F \ N	8	16	32
$10^{-1}$	8,67	12,25	17,21
$10^{-4}$	20,1	26,5	39,945

### Характеристики обнаружения сравниваемых устройств

Получив впервые столь ценные корректные расчетные данные для малых вероятностей ложной тревоги для сравниваемых корреляционных устройств было бы правильно рассчитать для них и характеристики обнаружения флюктуирующего коррелированного сигнала. Это и было сделано с помощью моделирования в системе MATLAB. На рис. 3 и рис. 4 приводятся вероятности правильного обнаружения флюктуирующего сигнала с коэффициентом корреляции 0,9 двух рассматриваемых устройств соответственно, для  $N=8$  и вероятности ложной тревоги  $10^{-1}$  и  $N=32$  и вероятности ложной тревоги  $10^{-4}$ .

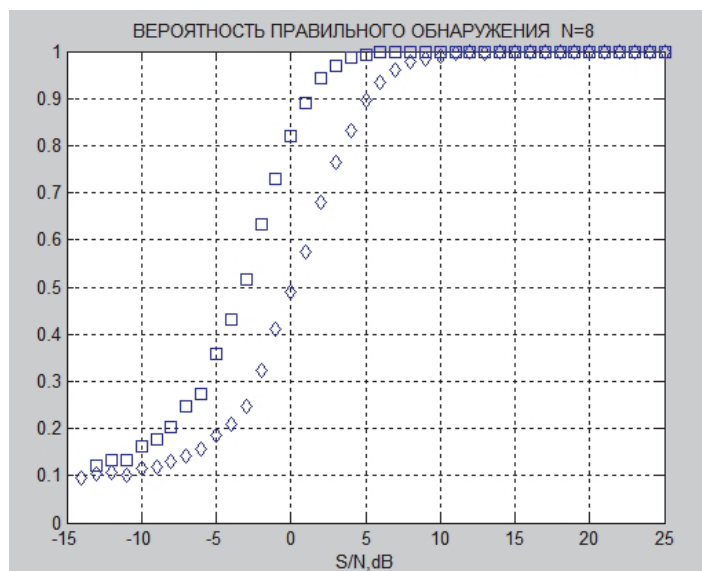


Рис. 3. Зависимость вероятности правильного обнаружения коррелированного сигнала ( $R=0,9$ ) для  $N = 8$  и вероятности ложной тревоги  $10^{-1}$  в устройствах типа МОП (ромбики) и упрощенный МОП без нормировки (квадратики).

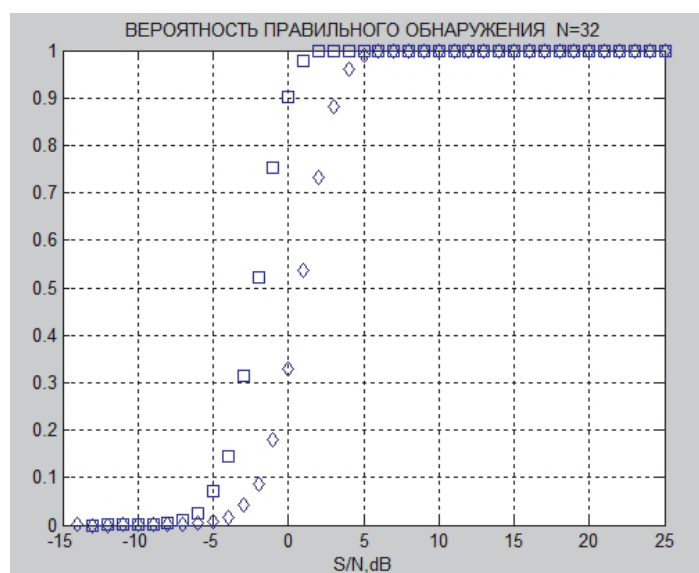


Рис. 4. Зависимость вероятности правильного обнаружения коррелированного сигнала ( $R=0,9$ ) для  $N = 32$  и вероятности ложной тревоги  $10^{-4}$  в устройствах типа МОП (ромбики), упрощенный МОП без нормировки (квадратики)

### Выводы

Используя аналитические выражения для распределений на выходе двух типов нелинейных устройств, впервые удалось рассчитать точные значения порогов для ма-

лых вероятностей ложной тревоги при небольшом числе накоплений после умножения (8-32), при котором выходное распределение рассматриваемых устройств корреляционного типа существенно отличается от нормального. Рассчитаны характеристики обнаружения сравниваемых устройств. Данные расчеты могут быть использованы при анализе эффективности нелинейных устройств корреляционного типа. Показано, что наибольшей эффективностью в пороговом сигнале для вероятности правильного обнаружения 0,5 и вероятности ложной тревоги  $10^{-1}$  и  $10^{-4}$  обладает обнаружитель с умножителем и когерентным накоплением без нормировки. По сравнению с обнаружителем ОМП этот выигрыш может достигать 3-4 дБ. Это ухудшение эффективности обнаружителя ОМП можно объяснить необходимостью оценивания дополнительных случайных параметров в знаменателе формулы (1). Это своего рода плата за инвариантные свойства этого алгоритма к изменениям мощности шума на входе, что обеспечивает стабилизацию вероятности ложной тревоги на выходе корреляционного обнаружителя ОМП.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартенева В.Г.* О выборе числа градаций весовых коэффициентов адаптивного цифрового фильтра // Современная электроника. 2007. №3, С. 62-64.
2. *Bartenev V.G.* Radar objects classification using inter frequency correlation coefficient International Conference Radar2016 Report, China, 2016.
3. *Бартенева В.Г.* Квазиоптимальные адаптивные алгоритмы обнаружения сигналов // Современная электроника. 2011. №2, С. 70-73.
4. *Бартенева В.Г.* Применение распределения Уишарта для анализа эффективности адаптивных систем СДЦ // Радиотехника и электроника. 1981. Т. XXVI, № 2, С. 356-361.
5. *Бартенева В.Г., Бартенева М.В.* Способ нахождения вероятностных характеристик на выходе нелинейных систем // Цифровая обработка сигналов. 2013. №4. С. 42-44.