ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ПРОТЯЖЁННЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ АНТЕНН НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2016 г. В.В. ЧЕБЫШЕВ, П.В. БЛАГОВИСНЫЙ

Московский технический университет связи и информатики

Проволочные вибраторные антенны, особенно в составе решёток, являются наиболее распространённым типом современных антенн различного назначения и диапазонов волн. С развитием и усложнением радиоэлектронной аппаратуры выдвигается проблема проектирования проволочных антенн, особенно для современных систем связи, имеющие конструктивные и технологические преимущества.

Основой математического моделирования и создания вычислительных алгоритмов анализа указанных антенн является редукция соответствующих граничных задач электродинамики к интегральным уравнениям (ИУ) для тока антенны. ИУ справедливы для всего частотного диапазона, имеют меньшую размерность, чем граничная задача, и универсальность по отношению к геометрии проводников антенны. С вычислительной точки зрения наиболее эффективным представляется использование интегральных и интегро-дифференциальных уравнений первого рода, которые приводят к построению единообразных и эффективных алгоритмов численного анализа антенн. Если ток антенн известен, то расчёт её характеристик не вызывает принципиальных трудностей.

Численное решение ИУ или системы ИУ (для системы проводников) состоит в их дискретизации и сведении к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомой функции. Для дискретизации возможно использование проекционных методов, например, метода Галёркина или метода коллокаций. СЛАУ для рассматриваемого класса задач характеризуется полной (заполненной) комплексной матрицей. Для достаточно произвольных по геометрии и размерам проводниковых антенных структур СЛАУ оказываются высокого порядка, и для их решения необходимы специальные вычислительные алгоритмы.

Целью работы является исследование адекватных математических моделей для проволочных антенн с последующим описанием единообразных численных алгоритмов на основе способов дискретизации и аппроксимации тока антенн [1].

В качестве ключевой можно выделить задачу возбуждения (дифракции) на тонком проводе произвольной геометрии. Криволинейную проволочную антенну (рис. 1) с размером провода ka << 1, k = 2π/λ, λ – рабочая длина волны, охарактеризуем образующей в виде кусочно-гладкой кривой $\boldsymbol{\zeta}$. Геометрия последней описывается ортогональной криволинейной системой координат (s, v) с коэффициентами Ламе h1, h2. Вход антенны представим с щелью размеромt_b, k_b << 1. При разности потенциаловU на входе в щели устанавливается первичное поле E^0.

Для тока I(*l*) проволочной антенны можно получить

$$\frac{\partial}{\partial l}\left\{\int_\zeta (S^0,S_0^0)I(l_0)\frac{\partial}{\partial l_0}G(M,M_0)dl_0\right\}-k^2\int_\zeta (S^0,S_0^0)I(l_0)\frac{\partial}{\partial l_0}G(M,M_0)d=-4i\pi\omega\varepsilon(E^0,S^0) \quad (1)$$

где (S^0,S_0^0), (E^0,S^0) – скалярные произведения единичных векторов в точках M и M_0 (рис. 1), dl= h_1·ds – элементы длины.

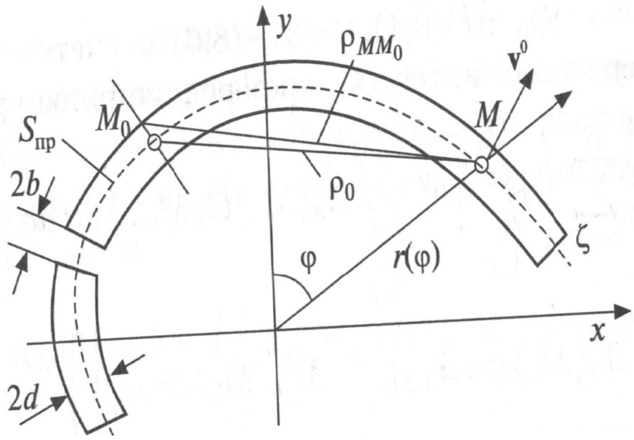

Рис. 1. Криволинейная проволочная антенна.

Уравнение (1) является интегро-дифференциальным уравнением для тока I(l) проволочной антенны. В задаче возбуждения E^0 = U/(2b), где U – разность потенциалов на входе антенны. Уравнение (1) известно как интегральное уравнение Поклингтона.

Для случая кривых ζ постоянной кривизныh$_1$, h$_2$ = const, выделяя дифференциальный оператор ($d^2/dl^2 + k^2$)и используя известную формулу обращения, получим

$$\int_\zeta I(l_0)\,K(l,l_0)dl_0 = i\frac{k}{2\omega}\int_\zeta E_0(u)\sin\,(k|l-u|)du + c_1 sinkl + c_2 coskl \qquad (2)$$

где ядро уравнения имеет вид

$$K(l,l_0) = (S^0, S_0^0)G(M,M_0) \qquad (3)$$

$$G(M,M_0) = \frac{exp(-ik\sqrt{a^2+(l-l')^2})}{a^2+(l-l')^2}$$

a – радиус провода, M, M_0 – точки на кривой ζ. Коэффициенты c_1 и c_2 выбираются из дополнительных условий (равенства нулю тока на концах провода). Уравнение (2) известно как интегральное уравнение Галлена.

ИУ (3) используется для анализа проводниковых структур постоянной кривизны, к которым относятся линейные, кольцевые и эквиугольные структуры.

ИУ (1) и (2) являются уравнениями Фредгольма первого рода. Их применение не даёт больших преимуществ, однако уравнение Галлена является более общим в части задания поля в правой части уравнения, создаваемого источником возбуждения.

Для токов проволочных антенн имеем интегро-дифференциальные или интегральные уравнения первого рода. Численное решение этих уравнений предполагает их дискретизацию и аппроксимацию тока и сведение к СЛАУ. Решение уравнений первого рода является, в общем случае, некорректной задачей по А. Н. Тихонову из-за численной неустойчивости решения (в зависимости от правой части уравнения, определяющей способ возбуждения антенны) и требует регуляризации. Методы и алгоритмы регуляризации могут быть различными. Для рассматриваемых интегральных уравнений наиболее удобен простой метод регуляризации, который называют методом саморегуляризации[2]. Метод использует априорное свойство гладкости искомого решения и слабой особенности ядер ИУ.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (1) для тока проволочной антенны. Алгоритм, реализующий принцип саморегуляризации уравнения состоит в выделении особенности его ядер, локальной интерполяции искомого решения и его вычислении в заданном наборе точек коллокаций. Определим наибольший размер проволочной структуры $S_{пр}$ по контуру ζ как 2L и разобьём его на Nотрезков с шагом h=2L/N. Для концов отрезков разбиения и узлов отрезков определим значения

$$l_{i-1/2} = -Lh\left(i-\frac{3}{2}\right);\ l_{i+\frac{1}{2}} = -Lh\left(i-\frac{1}{2}\right);\ l_i = -Lh(i-1), i\ =\ 2, \dots, N$$

Предполагаем кусочно-постоянную аппроксимацию тока и в узлах определим коэффициенты $I(l_i) = I_i$. в точках коллокаций получим из СЛАУ

$$\sum_{i=2}^{N} I_i A_{ij} = F_j\,,\ \ j = 2, \dots, N \tag{4}$$

где

$$A_{ij} = D_{j,i+1/2} - D_{j,i-1/2} - B_{ji}$$

$$D_{j,i+1/2} = \frac{\partial}{\partial l} G(l, l_{i+\frac{1}{2}})\Big|_{l=l_j};\ D_{j,i-1/2} = \frac{\partial}{\partial l} G(l, l_{i-\frac{1}{2}})\Big|_{l=l_j}$$

$$B_{ji} = \int_{l_{i-\frac{1}{2}}}^{l_{i+\frac{1}{2}}} (S_j, S^0) G_0(l_j, l_0) dl_0$$

$$F_j = \begin{cases} (E^0, S^0),\ \ j = \dfrac{N}{2} + 1 \\ 0,\ \ j \neq \dfrac{N}{2} + 1 \end{cases}$$

В (4) учтены условия на концах проводника $I_1,\dots,I_{N+1} = 0$. При достаточно малом значении h диагональные элементы СЛАУ превосходят по абсолютной величине остальные элементы матрицы, что обеспечивает её устойчивое решение. Шаг дискретизации $h < 0{,}05\lambda$.

Рассмотрим ИУ (2). Алгоритм его численного решения, реализующий принцип саморегуляризации, состоит в выделении особенности ядра, локальной интерполяции искомого решения и сведении при его дискретизации с шагом h (расстояние между соседними точками коллокации) к хорошо обусловленной СЛАУ. В отличие от рассмотренного выше алгоритма предполагается, что точки коллокации совпадают узлами интерполяции. Зададим разбиение проводника на Nчастей с шагом h = 2L/N и образуем сетку переменных $\{l_i, l_j\}$, i, j= 1,…,N+1. Например, предполагая кусочно-постоянную аппроксимацию тока $I(l_i) = I_i$,на шаге дискретизации hиз (2) получим СЛАУ

$$\sum_{i=2}^{N} A_{ji} I_i = B_j + c_1 sin l_j + c_2 cos l_j\,, j = 1, \dots, N+1 \tag{5}$$

где

$$A_{ji} = \int_{l_{i-\frac{1}{2}}}^{l_{i+\frac{1}{2}}} K(l_j, l_0) dl_0$$

$$B_j = \int_{-L}^{L} F^0(u) sin|l_j - u| du$$

$$l_{i-\frac{1}{2}} = h\left(i-\frac{3}{2}\right) - L;\ l_{i+\frac{1}{2}} = h\left(i-\frac{1}{2}\right) - L$$

В системе (5) учтено условие на концах проводника I(L)=I(-L)=0. При этом матрица доопределяется элементами $A_{j,1}=-\cos l_j$, $A_{j,N+1}=-\sin l_j$, j = 1,…,N+1, а коэффициенты c_1 и c_2 входят в число неизвестных системы. Матрица системы (5) в силу выделенной особенности ядра имеет диагональное преобладание и решение системы является устойчивым. Параметром регуляризации является шаг $h < 0{,}05\lambda$.

Особенности построения численного решения ИУ 1-го рода рассмотрим на примере решения ИУ для полного тока полоскового вибратора

$$\int_{-L}^{L} I(x_0)G(x,x_0)dx_0 = \frac{U}{60}J_0(b)sin|x| + C_1 sinx + C_2 cosx \qquad (6)$$

где 2L – длина вибратора, 2b – размер щели на его входе, U – разность потенциалов на входе, $G(x,x_0)$ – ядро уравнения, имеющее логарифмическую особенность, C_1, C_2 – коэффициенты, определяемые из дополнительных условий на концах вибратора.

Устойчивость решения СЛАУ в алгоритме саморегуляризации обеспечивается преобладанием диагональных элементов матрицы системы.

Критерием правильности приближенного решения служит его внутренняя сходимость в серии расчётов при сгущении точек коллокации (увеличение порядка N матрицы) с последующей оценкой невязки решения.

При указанном методе погрешность решения ИУ определяется погрешностью вычисления элементов матрицы СЛАУ при данной кусочно-полиномиальной аппроксимации решения на шаге h. Если квадратурная формула численного интегрирования выбрана, то имеются два способа уменьшения погрешности решения.

Первый способ – при данной степени интерполяционного многочлена уменьшается шаг дискретизации h.

Второй способ – при сохранении шага h увеличивается степень многочлена, т.е. увеличивается число используемых для этого узлов интерполяции. Однако степень аппроксимирующего многочлена не должна быть слишком большой, так как это существенно усложняет программную реализацию алгоритма и увеличивает время счёта матрицы СЛАУ на ЭВМ.

Увеличение числа точек коллокации ведёт к быстрому росту объёма вычислений и, следовательно, к быстрому росту объёма занимаемой памяти ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о выборе наиболее выгодного с точки зрения расходования ресурсов ЭВМ способа кусочно-полиномиальной интерполяции и шага дискретизации h, обеспечивающих получение приемлемого числа решений [3].

Допустимые значения шага дискретизации при погрешности расчёта тока вибратора не более 5% приведены в табл. 1.

Таблица 1

Шаг дискретизации

Вид аппроксимации тока	h	h(λ)
Кусочно-постоянная	1,16	0,026
Кусочно-тригонометрическая	0,262	0,042
Кусочно-квадратичная	0,657	0,105
сплайн	0,98	0,156

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чебышев В.В.* Основы проектирования антенных систем. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2016. – 150 с.: ил.
2. *Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн*. - М.: Наука, 1989. - 544 с.
3. *Чебышев В.В.* Вычислительная электродинамика для полосковых структур в слоистых средах. - М.: Изд-во ЗАО «ПСТМ», 2013 – 128 с.