АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО СПЕКТРУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

**© 2016 г. А.Н. ДЕМЕНТЬЕВ, А.А. КУЛИКОВ, Д.В. САМАРИН,
Д.С. СОЛДАТОВ, В.Ю. ЕРШОВ, С.В. АБЫШЕВ**

Московский технологический университет (МИРЭА)

В телекоммуникационных системах связи широко используются мощные СВЧ-усилители. Наиболее эффективным методом исследования СВЧ-усилителей является численно-аналитический метод анализа по спектральному мониторингу выходного сигнала. Метод использует статистический анализ нелинейных динамических систем с аппроксимацией передаточных характеристик функциями Бесселя. Пусть на вход СВЧ-усилителя поступает гармонический сигнал $u(t) = U_\omega \cos\omega t$. Тогда зависимость между током и поступающим на вход усилителя напряжением может быть записана как $i(t) = f[u(t)]$. Воздействующее напряжение $u(t)$ обычно состоит из постоянного напряжения смещения U_0 и переменного напряжения $u_\sim$ (обозначим его для упрощения через $u = u_\sim$), поэтому $i = f(U_0 + u)$, или

$$i = f(x + u), \tag{1}$$

где $x = U_0$.

Зависимость (1) разложим в ряд Тейлора, который запишем в символической форме $f(x + u) = e^{ud/dx} f(x)$. (2)

Справедливость этой записи легко доказывается, если условиться, что после формального разложения в ряд $e^{ud/dx}$ функция $f(x)$ подводится под знак дифференцирования:

$$e^{ud/dx} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} u^n , \tag{3}$$

что представляет известное выражение ряда Тейлора от одной переменной.

Пусть на СВЧ-усилитель воздействует напряжение $u = U_0 + U_\omega \cos\omega t$. В данном случае, как и во всех последующих, фазу опускаем из рассмотрения, так как ее, как преобразующуюся одинаково с фазовым углом ωt, можно сразу определить по структуре анализируемой частоты ω. Подставляя значения напряжения в выражение (2), имеем

$$i = e^{U_\omega \cos\omega t \frac{d}{dU_0}} f(U_0) . \tag{4}$$

Разложим формулу (3) в ряд Лорана,

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p (z - z_0)^p ,$$

где z_0 – фиксированная точка пространства, включая точки изолированного направления, C_p – пространственные комплексные числа в том числе и из пространства делителей нуля. В результате имеем:

$$i = \mathrm{e}^{U_\omega \cos\omega t \frac{d}{dU_0}} f(U_0) = \sum_{\partial=-\infty}^{\infty} I_\partial\left(U_\infty \frac{d}{dU_0}\right) f(U_0) e^{j\partial\omega t}\,, \tag{5}$$

где

$$I_\partial(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+p}}{2^{2m+p}(m+p)!\,m!} \tag{6}$$

представляет видоизмененную функцию Бесселя 1-го рода и p-го порядка.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{\partial=-\infty}^{\infty} I_\partial(z)\mathrm{e}^{j\partial\varphi} = \sum_{\partial=0}^{\infty} I_\partial(z) e^{-j\partial\varphi} + \sum_{\partial=1}^{\infty} I_\partial(z) e^{j\partial\phi}\varphi = I_0(z) + 2\sum_{\partial=1}^{\infty} I_\partial(z)\cos\partial\varphi\,,$$

поэтому выражение (5) можно преобразовать так

$$i = I_0\left(U_\omega \frac{d}{dU_0}\right) f(U_0) + 2\sum_{P=1}^{\infty} I_P\left(U_\omega \frac{d}{dU_0}\right) f(U_0)\cos p\omega t\,. \tag{7}$$

Представляя в (7) функции Бесселя в виде обычного ряда и подводя функцию $f(U_0)$ под знак дифференцирования, получим

$$i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} \frac{d^{2m} f(U_0)}{dU_0^{2m}} U_\omega^{2m} + \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+p-1}(m+p)!\,m!} \frac{d^{2m+p} f(U_0)}{dU_0^{2m+p}} U_\omega^{2m+\partial} \cos p\omega t. \tag{8}$$

Соотношение (8) представляет всю гамму спектрального состава тока и позволяет вычислить каждую составляющую в отдельности. Величины производных находятся путем дифференцирования функции, аппроксимирующей вольт-амперную (передаточную) характеристику усилительного элемента СВЧ-усилителя и компьютерного вычисления при заданном напряжении смещения U_0. Так как практически аппроксимирующая функция представляется многочленом n-й степени, то все производные, начиная с порядка n + 1 и выше, будут равны нулю. В таком случае ряды, определяющие амплитуду любой составляющей тока, будут иметь конечное число членов. Так, например p-я составляющая тока будет:

$$i_p(t) = I_{p\omega}\cos p\omega t = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{2^{2m+p-1}(m+p)!\,m!} \frac{d^{2m+p} f(U_0)}{dU_0^{2m+p}} U_\omega^{2m+\partial} \cos p\omega t, \tag{9}$$

где верхний предел суммы число k, выбираемое так, чтобы выполнялось одно из неравенств:

$$2k + p = n, \quad 2k + p = n - 1. \tag{10}$$

Если воздействующее на нелинейный элемент напряжение представляется суммой постоянной составляющих и k кратных гармоник

$$u = U_0 + \sum_{s=1}^{K} U_{\omega_s} \cos\omega_s t\,, \tag{11}$$

то будем иметь

$$i = \mathrm{e}^{\left(\sum_{s=1}^{k} U_{\omega_s}\cos\omega_s t\right)\frac{d}{dU_0}} f(U_0) = \left[\prod_{s=1}^{K} \mathrm{e}^{\frac{d(U_{\omega_s}\cos\omega_s t)}{dU_0}}\right] f(U_0)\,. \tag{12}$$

Разложим (12) в ряд Лорана:

$$i=\left[\prod_{s=1}^{k}\sum_{p_s=-\infty}^{\infty} I_{p_s}\left(\frac{dU_{\omega_s}}{dU_0}\right)\mathrm{e}^{jp_s\omega_s t}\right]f\left(U_0\right).$$

Производя перемножение, получим

$$i=\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\ \ldots\sum_{p_k=-\infty}^{\infty}\left[\prod_{s=1}^{k} I_{p_s}\left(\frac{dU_{\omega_s}}{dU_0}\right)\right]f\left(U_0\right)\mathrm{e}^{j\sum_{s=1}^{k}p_s\omega_s t}. \qquad (13)$$

Если сигнал представлен двумя гармоник (k = 2), т.е. $u=U_{\omega_1}\cos\omega_1 t+U_{\omega_2}\cos\omega_2 t,$ то

$$i=\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} I_{p_1}\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_{p_2}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\mathrm{e}^{j\left(p_1\omega_1+p_2\omega_2\right)t}. \qquad (14)$$

Раскрывая поочередно в (14) суммы и освобождаясь от отрицательных значений p_1 и p_2, а затем, переходя к тригонометрической форме, легко получим выражение, определяющее постоянную компоненту и все гармонические и комбинационные компоненты тока:

$$i=I_0\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_0\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)+2\sum_{p_1=1}^{\infty} I_{p_1}\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_0\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\cos p_1\omega_1 t+$$

$$+2\sum_{p_2=1}^{\infty} I_0\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_{p_2}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\cos p_2\omega_2 t+$$

$$+2\sum_{p_1=1}^{\infty}\sum_{p_2=1}^{\infty} I_{\delta_1}\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_{p_2}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\cos(p_1\omega_1+p_2\omega_2)\,t+$$

$$+2\sum_{p_1=1}^{\infty}\sum_{p_2=1}^{\infty} I_{\delta_1}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)I_{\delta_2}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\cos\left(p_1\omega_1-p_2\omega_2\right)t.$$

В более компактном виде последнее выражение можно записать:

$$i=I_0\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_0\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)+2\sum_{p_1=h_1}^{\infty}\ \sum_{p_2=h_2}^{\infty} I_{\delta_1}\left(\frac{dU_{\omega_1}}{dU_0}\right)I_{p_2}\left(\frac{dU_{\omega_2}}{dU_0}\right)f\left(U_0\right)\cos(p_1\omega_1-p_2\omega_2)t, \qquad (15)$$

при этом нижние пределы суммирования h_1 и h_2 равны 0 или 1 и должны выбираться так, чтобы выполнялось условие $h_1 + h_2 =1$, т.е. h_1 и h_2 одновременно не могут быть нулями. Аналогично в тригонометрической форме может быть представлено и выражение (12), а именно:

$$i=\left[\prod_{s=1}^{k} I_0\left(\frac{dU_{\omega_s}}{dU_0}\right)\right]f\left(U_0\right)+2\sum_{p_1=h_1}^{\infty}\ \sum_{p_2=h_2}^{\infty}\ldots\sum_{p_k=h_k}^{\infty}\left[\prod_{s=1}^{k} I_{P_s}\frac{dU_{\omega_s}}{dU_0}\right]f\left(U_0\right)\cos\left(p_1\omega_1+\sum_{s=2}^{k}\pm p_s\omega_s\right)t, \qquad (16)$$

где нижние пределы суммирования h_1, $h_2 \ldots h_k$ выбираются, исходя из условия $\sum_{s=1}^{k}h_s=1$.

Соотношение (16) представляет всю гамму спектрального состава тока и позволяет легко вычислить каждую его составляющую в отдельности с помощью известных в математике функций Бесселя 1-го рода p-го порядка. На основании полученных результатов в диссертации был разработан квазилинейный численно-аналитический метод анализа нелинейных СВЧ-УСИЛИТЕЛЯ по спектральному мониторингу выходного сигнала.

В этом методе групповое колебание на выходе нелинейного СВЧ-усилителя можно представить в следующем виде:

$$u_{\hat{a}\hat{u}\,\tilde{o}}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \exp(j\omega_0 t) \sum_{k_1 k_2,\ldots,k_j=-\infty}^{\infty} \exp\left[j\sum_{i=1}^{N} K_i \theta_i(t) \right] M(K_1, K_2, \ldots, K_N) \right\}, \tag{17}$$

где $M(K_1, K_2, \ldots, K_N)$ – комплексная амплитуда полезных сигналов и продуктов интермодуляционных искажений на угловой частоте $K_1\omega_1 + K_2\omega_2 + \ldots + K_N\omega_N + \omega_0$ на выходе исследуемого нелинейного СВЧ-устройства; K_i – номер гармоники i-го сигнала.

Общее выражение комплексных амплитуд полезных сигналов и ИМИ на выходе нелинейного устройства в многосигнальном режиме можно записать так:

$$M(K_1, K_2, \ldots, K_N) = \int_{-\infty}^{\infty} r \left\{ \prod_{i=1}^{N} J_{K_1}(r)[U_{\text{вх}i}(t)] \right\} dr \int_{-\infty}^{\infty} \rho g(\rho) \exp j[\varphi(\rho)] J_1(\rho)] d\rho, \tag{18}$$

где J_K – функции Бесселя K-го порядка; r – переменная, являющаяся аналогом времени.

В формуле (18) функция $\rho(t)$ – огибающая многочастотного группового сигнала на входе, $g(\rho)$ и $\varphi(\rho)$ – передаточные АХ и ФАХ нелинейного СВЧ-усилителя мощности. Каждый тип составляющих ИМИ группового сигнала на выходе нелинейного СВЧ-усилителя мощности характеризуется набором целочисленных коэффициентов K_1, K_2, ..., K_N, которые могут принимать либо положительные, либо отрицательные, либо нулевые значения.

Если удастся вычислить прямое преобразование Фурье, то при использовании формул для определения выражений (14 - 16) поставленная задача вычисления спектра выходного сигнала любого устройства преобразования и усиления будет решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нефедов В.И.* Линейные СВЧ-усилители мощности для систем подвижной связи. Наукоемкие технологии, 2004, т. 5, № 12, с. 29-36.
2. *Нефедов В.И., Абоелазм М.А., Шпак А.В.* Монография // Под ред. В.И. Нефедова. Оптимизация параметров усилителей мощности. -М.: Энергоатомиздат, 2013. 239 с.
3. *Забалканский Э.С., Левин М.Е.* Преобразование спектра в усилителях с комплексной нелинейностью. Радиотехника, 1998, № 2, с. 15-18.
4. *Kenington P.B.* Methods Linearize RF Transmitters and Power Amps. Microwaves & RF, December. 1998. p. 79-84.