СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ГРАНИЦЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРИТЕРИЕВ ЭФФЕКТИВНОСТИ НОВЫХ ПРОЕКТОВ

© 2016 г. В.Е. БОЛНОКИН, В.И. СТОРОЖЕВ, НГУЕН ДИНЬ ЧУНГ

ФГУП Научно-исследовательский и экспериментальный институт
автомобильной электроники и электрооборудования
e-mail: vitalybolnokin@yandex.ru, stvi@i.ua, chungtasagroup@gmail.com

В инженерной практике автоматизированного выбора наилучших проектных решений, обеспечивающих наибольшую эффективность функционирования и минимальные риски эксплуатации все более широкое распространение находят методы многокритериальной оптимизации. С точки зрения реализации поисковых методов оптимизации практически важным представляется построение методов оценки экстремальных значений векторного критерия эффективности F(•), заданного на некотором подмножестве **m**-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^m$. Информация об экстремальных значениях критерия может быть весьма эффективно использована при формировании тестов на оптимальность алгоритмов, построенных с помощью приближенных методов, а также в процессе работы самого алгоритма в качестве критерия окончания поиска [1–3].

Конкретизируем задачу. Пусть **D** – некоторое непустое подмножество целочисленной решетки $\mathbf{Z}^m$ евклидова пространства $\mathbf{R}^m$, $F(x)=(F_1(\mathbf{x}),\ldots,F_k(\mathbf{x}))^T$ - критерий – функция цели, каждый компонент которой желательно минимизировать. Будем считать что $F(\mathbf{x}) \le F(\mathbf{y})$, если $F_i(\mathbf{x}) \le F_i(\mathbf{y})$; $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$, если $F_i(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{y})$; $F(\mathbf{x}) < F(\mathbf{y})$, если $F_i(\mathbf{x})<F_i(\mathbf{y})$, и существует j такое, что $F_j(\mathbf{x}) < F_j(\mathbf{y})$ (j,i=1,…,k).

Обозначим через $\mathbf{\Pi_x}$ множество Парето в пространстве аргументов: $\mathbf{\Pi_x}=\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{D}: \exists \mathbf{y} \in \mathbf{D} : F(\mathbf{y}) < F(\mathbf{x})\}$, через Π_F - множество Парето в пространстве значений $F(\mathbf{x})$: $\Pi_F = \{F : F = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Pi_x\}$.

Вводится множество недоминируемости критериев. Множество недоминируемости в пространстве аргументов определяется как $N_x = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{D} : \exists \mathbf{y} \in \mathbf{D} : F(\mathbf{y}) < F(\mathbf{x})\}$, в пространстве значений $F(\mathbf{x})$: $N_F = \{F : F = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in N_x\}$.

В случае скалярной функции F метод основывается на факте возможности аппроксимации функции распределения группового (случайного) минимума F некоторым предельным распределением $\Phi(y;\varepsilon,\sigma,\eta)$, зависящим от параметров ε, σ, η:

$$\Phi(y;\varepsilon,\sigma,\eta) = \begin{cases} 1-\exp\left\{-\left(\dfrac{y-\varepsilon}{\sigma}\right)\eta\right\} & \text{при } y \ge \varepsilon, \\ 0 & \text{при } y < \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $-\infty < \varepsilon < \infty$, $\sigma,\eta > 0$ – параметры минимума, масштаба и формы распределения $\Phi(y;\varepsilon,\sigma,\eta)$, называемого третьим предельным распределением или законом Вейбулла-Гнеденко. Распределение (1) хорошо аппроксимирует функцию распределения минимумов реализаций случайных величин, удовлетворяющих требованию ограниченности слева. Параметр ε дает искомое значение $\min\limits_{\mathbf{x}\in \mathbf{D}} F(\mathbf{x})$ [1].

Рассмотрим n выборок, каждая из которых размером в N членов, взятых из генеральной совокупности {F(ξ)} , где ξ - случайная величина, распределенная на **D** по некоторому закону (при отсутствии априорной информации можно считать ξ распределенной равновероятно на **D**). Пусть F_i^* – случайный минимум F в i– й группе (I = 1,…,n). Так как в большинстве практических задач мощность множества **D** велика, то с вероятностью, близкой к 1, можно принять гипотезу о независимости $F_i^*,\dots,F_n^*$. Теперь задача определения параметра $\varepsilon = \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} F(\mathbf{x})$ решается с помощью оценки параметров распределения (1) по выборке $F_i^*,\dots,F_i^*$.Для вычисления оценок параметра $\theta = (\varepsilon,\sigma,\eta)$ используются стандартные методы: моментов, максимального правдоподобия, байесовских оценок.

Оценки, полученные с помощью метода моментов, состоятельны, хотя и не имеют наименьшую из всех возможных дисперсию. Так как функции $\alpha_i(\varepsilon, \sigma, \eta)$ (I = 1,2,3) непрерывно зависят от своих аргументов, то с практической точки зрения для достижения требуемой точности при оценивании по методу моментов достаточное число членов в выборке $F_i^*,\dots,F_n^*$ определяется установлением величины $\mu_i(\varepsilon,\sigma,\eta)$ в стационарные значения. В этом случае, используя неравенства Чебышева, получаем:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\left\{\left|\mu_i-\alpha_i(\theta_0)\right|>\delta\right\}\le\alpha_{2j}(\tilde{\theta}_0)/\left(n\delta^2\right),\ j=1,2,3,$$

где $\mathbf{P}_{\theta_0}\{\cdot\}$ – вероятностная мера, соответствующая θ_0 - “истинному" значению параметра θ. Таким образом, верхняя граница требуемого количества наблюдений определяется как

$$\max\left[\alpha_{2j}(\theta_0)/\left(\delta_1\delta^2\right)\right]+1,\ \ j=1,2,3,$$

где $[\cdot]$ – символ операции взятия целой части; δ_1- заданный уровень значимости вероятности события $\{\mu_j-\alpha_j(\theta_0)>\delta\}$.

<u>*Метод максимального правдоподобия*</u> приводит к решению уравнения $Y_n\left(\hat{\theta}_n\right)=\max\limits_{\theta\in\Theta}\mathbf{Y}_n(\theta)$, где $\overline{\Theta}$ – замыкание множества изменения параметров; $Y_n(\theta)$ – функция правдоподобия: $Y_n(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f\left(F_i^*,\theta\right)$;

$$f(x,\theta)=\begin{cases} f(x,\varepsilon,\sigma,\eta)=\dfrac{n}{\sigma}\left(\dfrac{x-\varepsilon}{\sigma}\right)^{\eta-1}\exp\left\{-\left(\dfrac{x-\varepsilon}{\sigma}\right)^{\eta}\right\} & \text{при } x\ge\varepsilon,\\ 0 \quad \text{при } x<\varepsilon. \end{cases}$$

Поскольку $Y_n(\theta)$ – гладкая функция по θ , $\hat{\theta}_n\in\Theta$, то $\hat{\theta}_n$ есть также и решение относительно θ системы уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln Y_n(\varepsilon,\sigma,\eta)=0;\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\ln Y_n(\varepsilon,\sigma,\eta)=0;\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\ln Y_n(\varepsilon,\sigma,\eta)=0.$$

Раскрывая смысл $Y_n(\theta)$, системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{F_i^* - \varepsilon}{\sigma}\right)^{\eta} \ln\eta + 2n\ln\sigma - \frac{n}{\eta} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\eta\left(F_i^* - \varepsilon\right)^{\eta}\sigma^{-\eta-1} - \left(\frac{2n\eta + n}{\sigma}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{\sigma}\left(\frac{F_i^* - \varepsilon}{\sigma}\right)^{\eta-1} - \frac{1}{F_i^* - \varepsilon}\right] = 0.$$

Для решения данной системы уравнений можно использовать какой-нибудь стандартный метод нахождения корней нелинейной системы уравнений. Если система имеет несколько решений, то в качестве оценки для θ можно взять любое из них, максимизирующие $Y_n(\theta)$.

Оценки максимального правдоподобия состоятельны при самых общих предположениях, а их сходимость носит экспоненциальный характер:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\left\{\left\|\hat{\theta}_n - \theta_0\right\| > \gamma\right\} \le \sum_{i=1}^{L}\exp\{-c_i n\},$$

где $\|\cdot\|$ – символ евклидовой метрики в пространстве $\mathbf{R}^3$, а величины $c_i > 0$ (i=1,…,L) вычисляются заранее для определения требуемого числа наблюдений.

Метод обобщенных байесовских (относительно квадратичной функции потерь) оценок требует вычисления обобщенного апостериорного среднего для параметра ε:

$$\hat{\varepsilon}_n = \frac{\int\limits_{\Theta}\varepsilon\prod\limits_{i=1}^{n} f(F_i^*,\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta}{\int\limits_{\Theta}\prod\limits_{i=1}^{n} f(F_i^*,\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta} = \frac{\int\limits_{\alpha_\sigma}^{b_\sigma} d\sigma\int\limits_{\alpha_\eta}^{b_\eta} d\eta\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{b_\varepsilon}\varepsilon\prod\limits_{i=1}^{n} f(F_i^*;\varepsilon,\sigma,\eta)\,\omega(\varepsilon,\sigma,\eta)\,d\varepsilon}{\int\limits_{\alpha_\sigma}^{b_\sigma} d\sigma\int\limits_{\alpha_\eta}^{b_\eta} d\eta\int\limits_{\alpha_\varepsilon}^{b_\varepsilon}\prod\limits_{i=1}^{n} f(F_i^*;\varepsilon,\sigma,\eta)\,d\varepsilon}$$

где $[\alpha_\varepsilon, b_\varepsilon]\times[\alpha_\sigma, b_\sigma]\times[\alpha_\eta, b_\eta] = \mathbf{\Theta};\ \omega(\theta)$ – обобщенная априорная плотность распределения θ, т.е. функция $\omega(\theta)$ непрерывна, положительна и удовлетворяет условию $\int\limits_{\mathbf{\Theta}}\omega(\theta)d\theta < \infty$.

При решении конкретных задач чаще всего нет достоверной информации об априорном распределении параметров $\varepsilon, \sigma, \eta$. В этом случае оправдано использование обобщенных байесовских оценок с плотностью $\omega(\theta) = 1\,(\theta \in \mathbf{\Theta})$. Обобщенные байесовские оценки асимптотически эффективны, состоятельны и удобны при практическом применении, так как оценивание параметра ε не требует предварительной оценки параметров σ и η (скорость сходимости к истинным значениям дается в работе [1]).

После вычисления оценки по одному из методов следует проверить гипотезу о принадлежности выборки $F_i^*,\dots,F_n^*$ трехпараметрическому семейству с помощью критерия соответствия Пирсона. Корректное применение этого критерия требует употребления асимптотически эффективных оценок параметров $\varepsilon, \sigma, \eta$, например оценок максимального правдоподобия.

Построим алгоритм оценки значений множества Парето $\mathbf{П}_F$, в основу которого положены операция свертывания векторного критерия F(.) в семейство скалярных для получения паретовских решений и применения методов статистики экстремальных значений для оценки экстремумов сформированной свертки исходного векторного критерия. Наиболее часто в практических расчетах используются следующие формы сверток [2]:

$$S(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F_i(\mathrm{x}),\ \alpha_i \geq 0, i = 1,...,k;\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

$$S(\mathrm{x}) = F_j(\mathrm{x}),\ j \in \{1,...,k\},$$

$$F_i(\mathrm{x}) \leq c_i, i \neq j; i = 1,...,k.$$

Из семейства сверток, которые удовлетворяют неизбыточности и достаточности требованиям, выбрано линейное семейство

$$\mathrm{S}(\mathrm{F}; \alpha_1,...,\alpha_k; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{F}_i(\mathbf{x}),\ i = 1,...,k, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1,...,k.$$

Задачу оценивания конечной аппроксимирующей сети множества **П**$_F$ сведем к совокупности N задач статистической оценки величин $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} \mathrm{S}(\mathrm{F}; \alpha_i,...,\alpha_k, \mathbf{x})$ для всех возможных наборов чисел $\alpha_1^j,...,\alpha_k^j\ (j = 1,...,N)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\alpha_i^j \geq 0, i = 1,...,k; j = 1,...,N;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j = 1, j = 1,...,N;$$

$$\left|\alpha_i^j - \alpha_i^{j+1}\right| \leq \Delta_i, i = 1,...,k.$$

Оценку необходимом уровне приращений $\Delta_i\,(i = 1,...,k)$, обеспечивающем заданную точность аппроксимации S(П$_F$) – линейного образа множества Парето **П**$_F$, дает следующая Теорема.

Теорема. Пусть существуют и конечны величины $c_i = \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} \left|\mathrm{F}_i(\mathbf{x})\right|, i = 1,...,k.$
Тогда разница между последовательными точками линейного образа

$$\mathrm{S}(\Pi_F): \mathrm{S}_j = \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} \mathrm{S}(\mathrm{F}; \alpha_i^j,...,\alpha_k^j; \mathbf{x}),\quad \mathrm{S}_{j+1} = \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} \mathrm{S}(\mathrm{F}; \alpha_1^{j+1},...,\alpha_k^{j+1}, \mathbf{x})$$

оценивается соотношениями: $\left|\mathrm{S}_j - \mathrm{S}_{j+1}\right| \leq \mathbf{R} \times \mathbf{G}$, где $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2; \mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$

Настоящая теорема позволяет оценить потребный объем вычислений при решении практических задач оценки границы экстремальных значений критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болнокин В.Е., Чинаев П.И.* Алгоритмы анализа и синтеза систем автоматического управления на ЭВМ. Алгоритмы и программы. – М.: Радио и связь, 1991.– 378 с.
2. *Соболь И.М. Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука. 1981. – 105 с.
3. *Болнокин В.Е.* Статистическая оценка экстремальных значений критериев риска при проектировании систем.- Proceeding of International Conference – Information and Telecomunication Technologes in Intelligent System, Russia – Spain, 2003. P. 68–70.