К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ ТРАНЗИСТОРНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

© 2016 г. А.Е. КИТАЕВ

ОАО «СКБ РИАП», Нижний Новгород
e-mail: kitaev_a_e@mail.ru

Достаточно давно известно, что при больших прямых токах в реальных полупроводниковых диодах наблюдаются отклонения от экспоненциальной формулы Шокли [3]. Если взять за основу выражение [1]

$$I = I_s(e^{\frac{U}{\varphi}-\frac{IR}{\varphi}} - 1), \tag{1}$$

уточняющее формулу Шокли (здесь I – ток через диод, входящий и в левую, и в правую часть данного выражения, U – напряжение на диоде, I_s – ток насыщения, φ - температурный потенциал, а R – омическое сопротивление области диода с малой концентрацией примесей [1]), можно легко выразить напряжение через ток:

$$U = \varphi \ln(\frac{I}{I_s} + 1) + IR. \tag{2}$$

Явное выражение для тока (которое обращает формулу (2)) найти сложнее:

$$I = D(U) = -I_s + \frac{\varphi}{R} W(e^{\frac{U}{\varphi}} I_s \frac{R}{\varphi} e^{I_s \frac{R}{\varphi}}). \tag{3}$$

Символ «D» - это просто обозначение для функции, которую можно назвать «диодной» (или «обратной диодной» - если считать, что «прямая диодная» выражает напряжение через ток), $W(x)$ – это специальная функция Ламберта (с 80-х годов применяемая в компьютерных системах символьной математики).

С помощью выражения (3) можно «сконструировать» формулы для характеристик биполярного транзистора:

$$\begin{aligned} I_c &= \alpha D(U_{be}) - D(\alpha R D(U_{be}) - U_{cb}), \\ I_e &= -\alpha D(-U_{cb}) + D(\alpha R D(-U_{cb}) + U_{be}). \end{aligned} \tag{4}$$

Функция D – та же функция, что уже использована в формуле (3). Аналогичный параметру α коффициент в уравнениях Эберса-Молла называется коэффициентом передачи коллекторного тока [3] (для простоты полагается, что параметры α и R одинаковы для обоих p-n переходов биполярного транзистора). I_c и I_e – это токи через коллектор и эмиттер, а U_{be} и U_{cb} – напряжения база-эмиттер и коллектор-база.

Вернемся к выражению (1). Если рассмотреть задачу о расчете контура, в котором последовательно соединены диод, источник ЭДС (E) и сопротивление нагрузки (R_n), то нужно учесть, что сопротивление нагрузки и «внутреннее» сопротивление R при использовании данной модели по существу образуют единое сопротивление (так как включены последовательно). Это делает расчет тока в такой цепи аналогичным расчету вольт-амперной характеристики диода: U заменяется на E, а R на (R+R_n). Получается следующая формула для тока в данной цепи:

$$I = -I_s + \frac{\varphi}{R+R_n} W(e^{\frac{E}{\varphi}} I_s \frac{R+R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R+R_n}{\varphi}}). \tag{5}$$

Отметим, что похожий расчет (без учета наличия «внутреннего» сопротивления R) проводился в [2]. Также отметим, что, по всей видимости, подобное соотношение должно иметь место и для цепи со светодиодом.

Формулы, аналогичные соотношению (2) для напряжения на диоде, существуют и для напряжений на контактах биполярного транзистора:

$$\begin{aligned} U_{cb} &= -\varphi \ln(1+\frac{\alpha I_e}{I_s}-\frac{I_c}{I_s})+I_c R, \\ U_{be} &= \varphi \ln(1+\frac{I_e}{I_s}-\frac{\alpha I_c}{I_s})+I_e R. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим выходную цепь усилителя с общим эмиттером (с последовательно включенными сопротивлением нагрузки R_n и источником напряжения питания E). Запишем для нее уравнение Кирхгофа:

$$U_{cb}+I_c R_n+U_{be}=E\,. \tag{7}$$

Напряжение коллектор-база выразим через токи эмиттера и коллектора с помощью 1-го уравнения (6):

$$-\varphi \ln(1+\frac{\alpha I_e}{I_s}-\frac{I_c}{I_s})+I_c R+I_c R_n+U_{be}=E\,. \tag{8}$$

Если считать U_{be} независимым параметром, можно найти точное решение этого уравнения (относительно тока коллектора I_c). Оно также (как (3) и (4)) выражается через функцию Ламберта.

$$I_c=\alpha I_e-(-I_s+\frac{\varphi}{R+R_n}W(e^{\frac{\alpha I_e(R+R_n)-E+U_{be}}{\varphi}}I_s\frac{R+R_n}{\varphi}e^{I_s\frac{R+R_n}{\varphi}}))\,. \tag{9}$$

Так как I_e зависит от напряжения U_{be}, коллекторный ток можно записать следующим образом (используя модификации введенных выше функций D):

$$I_c=\alpha D_0(U_{be})-D_1(\alpha D_0(U_{be})(R+R_n)-(E-U_{be}))\,. \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_0(x) &= -I_s+\frac{\varphi}{R}W(e^{\frac{x}{\varphi}}I_s\frac{R}{\varphi}e^{I_s\frac{R}{\varphi}}), \\ D_1(x) &= -I_s+\frac{\varphi}{R+R_n}W(e^{\frac{x}{\varphi}}I_s\frac{R+R_n}{\varphi}e^{I_s\frac{R+R_n}{\varphi}}). \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью уравнения (7) можно выразить напряжение коллектор-эмиттер U_{ce}:

$$U_{ce}=E-R_n(\alpha D_0(U_{be})-D_1(\alpha D_0(U_{be})(R+R_n)-(E-U_{be})))\,. \tag{12}$$

Если учесть наличие стабилизирующего резистора R_{ne}, подключенного последовательно к эмиттеру, то уравнение (7) заменится на следующее:

$$U_{cb}+I_c R_n+I_e R_{ne}+U_{be}=E\,. \tag{13}$$

Если принять, что в рабочих режимах транзистора ток эмиттера равен току коллектора, деленному на параметр α, мы получим решение, заменив в (9) R_n на $R_n + R_{ne}/\alpha$.

$$I_c=\alpha D_0(U_{be})-D_{11}(\alpha D_0(U_{be})(R+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha})-(E-U_{be}))\,. \tag{14}$$

Функция D_{11} отличается от D_1 (использованной в предыдущем случае) наличием параметра R_{ne}:

$$D_{11}(x)=-I_s+\frac{\varphi}{R+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}}W(e^{\frac{x}{\varphi}}I_s\frac{R+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}}{\varphi}e^{I_s\frac{R+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}}{\varphi}})\,.$$

Для напряжения коллектор-эмиттер имеем формулу:

$$U_{ce} = E - (R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha})(\alpha D_0(U_{be}) - \\ -D_{11}(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha}) - (E - U_{be}))). \qquad (15)$$

Недостатком формул (12) и (15) является поведение описываемого ими выходного напряжения U_{ce} после перехода в режим насыщения (при достаточно больших прямых входных напряжениях). После минимума в момент наступления режима насыщения выходное напряжение начинает расти. Но мы ожидаем, что ток коллектора при больших входных напряжениях (прямых) будет стремиться к константе, а напряжение коллектор-эмиттер при этом будет очень малым (так как сопротивление транзистора в этом режиме близко к нулю). Чтобы получить подобное поведение решения после выхода в режим насыщения, нужно учесть, что напряжение U_{be} в уравнениях (7) и (13) не является независимым параметром, а фактически зависит от тока, протекающего через транзистор.

Заменим уравнение (10) на следующее:

$$I_c = \alpha D_0(U_{be}) - D_2(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n) - (E - U_{be})). \qquad (16)$$

Здесь функция D_2 немного отличается от использованной в (12) функции D_1 (D_0 – такая же).

$$D_2(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R + \frac{R}{\alpha} + R_n} W(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R + \frac{R}{\alpha} + R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R + \frac{R}{\alpha} + R_n}{\varphi}}).$$

Эти выражения дают ожидаемое поведение тока после выхода в режим насыщения. Как можно их получить? Вернемся к уравнению (7), прибавив и вычтя RI_e.

$$U_{cb} + I_c R_n + (I_e R - I_e R) + U_{be} = E. \qquad (17)$$

Обратим внимание на то, что согласно первому уравнению (6) должно существовать решение, в котором $I_e = I_c/\alpha$, и, кроме того, U_{cb} зависит лишь от I_c (но не от I_e и U_{be}). И это решение должно удовлетворять и уравнению Кирхгофа (7). Фактически именно это решение описывает режим насыщения. В соответствии с этим заменим одно из RI_e в уравнении (17) на RI_c/α. Мы получим

$$U_{cb} + I_c R_n + \frac{I_c}{\alpha} R - I_e R + U_{be} = E.$$

Раскроем значение U_{cb}:

$$-\varphi \ln(1 + \frac{\alpha I_e}{I_s} - \frac{I_c}{I_s}) + I_c R + I_c R_n + \frac{I_c}{\alpha} R - I_e R + U_{be} = E.$$

Решая это уравнение, мы получим (16).

Аналогичным образом можно изменить выражение (12) для U_{ce}:

$$U_{ce} = E - R_n(\alpha D_0(U_{be}) - D_2(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n) - (E - U_{be}))). \qquad (18)$$

Важно то, что подобное изменение практически не затрагивает левую часть кривой (до выхода в режим насыщения).

Выражения (14) и (15) можно преобразовать точно таким же образом.

$$I_c = \alpha D_0(U_{be}) - D_{21}(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha}) - (E - U_{be})), \\ U_{ce} = E - (R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha})(\alpha D_0(U_{be}) - \\ -D_{21}(\alpha D_0(U_{be})(R + R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha}) - (E - U_{be}))). \qquad (19)$$

Выражение для D_{21} учитывает наличие R_{ne}.

$$D_{21}(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R+\frac{R}{\alpha}+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}} W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R+\frac{R}{\alpha}+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}}{\varphi} e^{I_s \frac{R+\frac{R}{\alpha}+R_n+\frac{R_{ne}}{\alpha}}{\varphi}}\right).$$

В заключение статьи мы учтем отличие напряжения база-эмиттер от напряжения батареи U_{in} во входной цепи усилителя. Если записать уравнение Кирхгофа для входной цепи (пренебрегая внутренним сопротивлением источника сигнала), мы получим:

$$U_{be} = U_{in} - I_e R_{ne}.$$

Считая, что в рабочих режимах транзистора ток эмиттера равен току коллектора, деленному на параметр α, сделаем соответствующую замену:

$$U_{be} = U_{in} - \frac{I_c}{\alpha} R_{ne}.$$

Теперь можно составить уравнение, подставив значение U_{be} в первое соотношение (19).

$$\begin{aligned} I_c &= \alpha D_0 (U_{in} - \frac{I_c}{\alpha} R_{ne}) - \\ &- D_2[\alpha D_0 (U_{in} - \frac{I_c}{\alpha} R_{ne})(R + R_n + \frac{R_{ne}}{\alpha}) - \\ &-(E - U_{in} - \frac{I_c}{\alpha} R_{ne})]. \end{aligned}$$

Решая это уравнение численно, мы получим уменьшение наклона кривой в усилительном режиме (при увеличении стабилизирующего сопротивления R_{ne}). Про подобные системы со стабилизирующим резистором говорят, что они охвачены обратной связью по напряжению. В математическом плане учет обратной связи сводится к тому, что ток «возвращается» в правую часть первого соотношения (19), и выражение с током только в левой части превращается в уравнение (где ток и в левой, и в правой части), которое необходимо решить. Отметим также, что в случае $R_n \ll R_{ne}$ рассматриваемая система является эмиттерным повторителем.

Выводы

Представлено выражение, уточняющее формулу Шокли для вольт-амперной характеристики полупроводникового диода. Предложены аналитические выражения для характеристик биполярного транзистора (так же, как и в выражении для диода, в них используется специальная функция Ламберта). Выведены формулы для аналитического расчета усилителя с общим эмиттером (в том числе и при наличии стабилизирующего резистора в цепи эмиттера) в ключевом и усилительном режиме, а также в режиме насыщения. Применение полученных выражений позволит создать более удобные и точные алгоритмы для расчета схем с полупроводниковыми приборами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Битюрин Ю.А., Оболенский С.В., Мельников А.С., Чириманов А.П., Демарина Н.В., Киселева Е.В., Шитвов А.П.* Измерение статических характеристик полупроводникового диода. — Н. Новгород: ННГУ, 2004.
2. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
3. *Степаненко И.П.* Основы теории транзисторов и транзисторных схем. — М.: Энергия, 1977.