**Материалы Международной научно-технической конференции,
21 – 25 ноября 2016 г.**

МОСКВА **INTERMATIC – 2 0 1 6, часть 2** **МИРЭА**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

© 2016 г. Д.Н. ТРЕФИЛОВ, Н.А. ТРЕФИЛОВ, В.И. НЕФЕДОВ

Московский технологический университет (МИРЭА)

Для защиты антенн СВЧ, устанавливаемых на гиперзвуковых объектах, движущихся в атмосфере, применяются радиопрозрачные обтекатели и покрытия, изготавливаемые, как правило, из композиционных материалов [1-5]. Для учета их влияния на параметры антенн применяются экспериментальные методы измерения температурных зависимостей комплексной относительной диэлектрической проницаемости материалов [6, 7]. При измерениях параметров диэлектриков в области высоких температур отдельную проблему представляет измерение температуры как на поверхности, так и в объеме исследуемых образцов композиционных материалов. Для измерения температуры поверхности при температурах выше 300 °С используются пирометры. Однако, измеряемая температура поверхности при неизвестных теплофизических параметрах материала образца содержит методическую погрешность, величина которой составляет десятки градусов. Кроме того, пирометры характеризуются определенным быстродействием, поэтому могут создавать значительную инструментальную погрешность измерений нестационарных быстропротекающих процессов при имитации теплового удара на исследуемом образце.

Для измерения температуры в объеме исследуемых образцов диэлектриков применяются высокотемпературные термопары, например вольфрам–рениевые, имеющие малое сечение проводников. Заделка термопар в образец производится на этапах формообразования, а координаты точки размещения спая термопар в образце определяются по рентгеновскому снимку подготовленного образца. Если в процессе измерений необходимо определять температуру в различных сечениях образца, приходится использовать несколько термопар с различной глубиной заделки и использовать специальный математический аппарат для расчета температуры в промежуточных между термопарами точках образца.

Кардинальным решением проблемы измерения распределения температуры в исследуемом нагреваемом образце диэлектрика является использование численных математических методов, предназначенных для решения нестационарных прямых и коэффициентных обратных задач теплопроводности и радиационно-кондуктивного теплообмена для плоских слоев поглощающей, излучающей и рассеивающей среды. Обычно для целей измерения рассматривается одномерная задача. В математической постановке теплофизической задачи определения распределения температуры по толщине плоского образца диэлектрика рассматривается плоский слой теплофизически изотропного материала.

При решении задач теплопроводности могут использоваться граничные условия 1-го, 2-го или 3-го рода в произвольном для каждой поверхности сочетании. С точки зрения радиационного переноса отдельно в каждом спектральном диапазоне границы образца могут быть полупрозрачны или непрозрачны для собственного излучения материала и излучения внешних источников нагрева. Разнообразие типов граничных условий дает возможность моделировать произвольные условия теплового нагрева и обрабатывать результаты экспериментов, проводимых на самых разнообразных по конструкции и условиям нагрева образцов установках [7-9]. При решении коэффициентных обратных задач допускается как раздельное, так и комплексное определение температурных зависимостей объемной теплоемкости cq (*T*) и коэффициента теплопроводности λ (*T*). Возможность различной параметризации температурных зависимостей cq (*T*) и λ (*T*) позволяют эффективно определять как гладкие температурные зависимости, так и зависимости, обладающие особенностями (изломами, разрывами).

Теплофизические свойства материала образца – cq (*T*) и λ (*T*) являются нелинейными, зависят от температуры, а его оптико-физические свойства такие как коэффициенты поглощения и рассеяния, показатель преломления и индикатриса рассеяния зависят от температуры и длины волны излучения, связанного с нагревом.

Считается, что рассматриваемый слой материала находится в условиях одностороннего нагрева, обеспечивающего одномерный перенос энергии за счет теплопроводности и излучения. При этом известно начальное распределение температуры по образцу и условия теплообмена на его границах. При численной реализации состав задаваемых параметров теплообмена определяется конкретным видом теплового нагрева. Так при чисто радиационном нагреве, создаваемом СВЧ нагревателями или инфракрасными источниками, задаются плотности радиационных потоков, подводимых к поверхностям образца и их спектральное и угловое распределение. При конвективном нагреве, создаваемом газовыми горелками или источниками дуговой плазмы, известны температуры окружающей газовой среды и температурная зависимость коэффициента теплоотдачи. Кроме того, во всех случаях теплового нагрева считаются известными оптические свойства границ, т.е. индикатрисы отражения, пропускания и излучения, зависящие от температуры и длины волны теплового излучения.

Температурные зависимости cq (*T*) и λ (*T*) материала определяются из решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности или радиационно-кондуктивного теплообмена. В коэффициентных методах расчета к числу причинных характеристик относятся теплофизические свойства материала, а следственные проявления представляют собой температурные поля и поля излучения. В процессе эксперимента осуществляется измерение температуры в отдельных точках образца. При этом измерение температуры в одной внутренней точке образца позволяет восстановить лишь одну температурную зависимость cq (*T*) или λ (*T*) . Для восстановления обеих зависимостей необходимо измерение температуры не менее чем в двух точках по толщине образца и теплового потока на одной из его поверхностей.

Рассмотрим математическую модель нестационарной коэффициентной теплофизической задачи. Математическая модель радиационно-кондуктивного теплообмена в слое поглощающей, излучающей и рассеивающей среды включает в себя уравнение теплопроводности и уравнение переноса излучения, преобразованное с использованием двучленного приближения метода моментов [7, 8]. В состав математической модели входят уравнения для внутренних источников тепла, а также начальное условие для уравнения теплопроводности и граничные условия для уравнений теплопроводности и переноса излучения.

$$cq(T)\cdot\frac{\partial T(t,r)}{\partial t}=\frac{1}{r^n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(r^n\cdot\lambda(T)\cdot\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right)+q_V; \tag{1}$$

$$R_1<r<R_2;\quad R_1<r<R_2;\quad T(0,r)=f_0(r); \tag{2}$$

$$-K_1\cdot\lambda(T)\cdot\frac{\partial T(t,R_1)}{\partial r}=\alpha_1(T)\cdot T(t,R_1)+\beta_1(\tau)+\gamma_1(T); \tag{3}$$

$$K_2\cdot\lambda(T)\cdot\frac{\partial T(t,R_2)}{\partial r}=\alpha_2(T)\cdot T(t,R_2)+\beta_2(t)+\gamma_2(T); \tag{4}$$

$$R_1<r<R_2$$

$$\frac{1}{r^n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{r^n}{\varpi_\nu}\cdot\frac{dM_{0_\nu}(r)}{dr}\right)-3\cdot\alpha_\nu\cdot M_{0_\nu}(r)=-3\cdot\alpha_\nu\cdot B_\nu^*(T); \quad (5)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\cdot\varpi_\nu}\cdot\left(\frac{1}{3}+R_{11_{W1_\nu}}\right)\cdot\frac{dM_{0_\nu}(R_1)}{dr}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-R_{01_{W1_\nu}}\right)\cdot M_{0_\nu}(R_1)=\\&=q_{0_{W1_\nu}}\cdot\left(2\cdot\eta_{m_{W1}}\cdot Q_{01_{W1_\nu}}+\eta_{\delta_{W1}}\cdot Q_{1_{W1_\nu}}\right)+2\cdot E_{W1_\nu}\cdot n^2\cdot B_{W1_\nu}(T_{W1});\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\cdot\varpi_\nu}\cdot\left(\frac{1}{3}+R_{11_{W2_\nu}}\right)\cdot\frac{dM_{0_\nu}(R_2)}{dr}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-R_{01_{W2_\nu}}\right)\cdot M_{0_\nu}(R_2)=\\&=q_{0_{W2_\nu}}\cdot\left(2\cdot\eta_{m_{W2}}\cdot Q_{01_{W2_\nu}}+\eta_{\delta_{W2}}\cdot Q_{1_{W2_\nu}}\right)+2\cdot E_{W2_\nu}\cdot n_\nu^2\cdot B_{W2_\nu}(T_{W2});\end{aligned} \quad (7)$$

$$q_V=\int_{\bar{\nu}_1}\alpha_\nu\cdot\left(M_{0_\nu}(r)-B_\nu^*(T)\right)\cdot d\nu, \quad (8)$$

$$\varpi=\alpha+\beta\,(1-p),$$

где: *T* – температура, *К*; *t* – время; *r* – координата; cq – объемная теплоемкость, Дж/м^3; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м·К; α – коэффициент поглощения, м$^{-1}$; β – коэффициент рассеяния, м$^{-1}$; *p* – параметр индикатрисы рассеяния; f_0 – начальное распределение температуры; $K_{1,2}$ – переменная, указывающая на тип граничных условий.

При $K_{1,2}=0$ задаются граничные условия 1-го рода. В этом случае

$$\alpha_{1,2}(T)=-1; \qquad \gamma_{1,2}(T)=0; \qquad \beta_{1,2}(\tau)=f_{1,2}(\tau);$$

$f_{1,2}(\tau)$ – зависимость температуры поверхности во времени.

При $K_{1,2}=1$ задаются граничные условия 2-го и 3-го рода. В этом случае

$$\alpha_{1,2}(T)=-\alpha_{f1,2};\ \beta_{1,2}(\tau)=q_{TW1,W2};$$

$$\gamma_{1,2}(T)=\int_{\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2}\varepsilon_{W1,2_\nu}\cdot q_{\Pi_{W1,W2_\nu}}d\nu-\int_{\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2}\varepsilon_{W1,2_\nu}\cdot B_{W1,2_\nu}d\nu+\alpha_{f1,2}\cdot T_{f1,2};$$

где: $\alpha_{f1,2}$ – коэффициент теплоотдачи, Вт/м^2; ε – степень черноты граничной поверхности; q_Π – плотность падающего потока излучения, Вт/м^2; q_T – плотность потока, поглощенного поверхностью, Вт/м^2; T_f – температура окружающей среды, *К*; *В* – функция Планка; *n* – показатель преломления; $B^*=4\cdot n^2 B$; R_{mn}, Q_{mn}, Q_m, *Е* – интегральные оптические характеристики граничных поверхностей; η_m – доля диффузного излучения в падающем радиационном потоке; $\eta_б$ – доля направленного излучения в падающем радиационном потоке; q_0 – радиационный поток приходящийся в область полупрозрачности материала, Вт/м^2; M_0 – момент интенсивности излучения 0-го порядка, Вт/м^2. Индекс ν указывает на частотную зависимость, а *W*1*, W*2 относятся соответственно к фронтальной и тыльной поверхности.

Решение системы (1)-(8) производится по методу конечных разностей с использованием неявной разностной схемы. Коэффициентная задача радиационно-кондуктивного теплообмена обычно формулируется в экстремальной постановке [10, 11]. Алгоритм определения коэффициентов уравнения (1) λ (*T*), cq (*T*) осуществляется путем минимизации функционала, связывающего экспериментальные и расчетные температуры

$$S=\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau^e}\left(T^e(\tau,r_i)-T(\tau,r_i)\right)^2 d\tau=\min, \tag{9}$$

где: *N* – количество датчиков температуры; $T^e(t,r_i)$ – экспериментальные значения температуры; $T(t,r_i)$ – расчетные значения температуры, определяемые из решения (1-8); t^e – продолжительность эксперимента.

Решение радиационно-кондуктивного теплообмена обычно осуществляется с использованием принципа итерационной регуляризации [11, 12]. При этом для прекращения процесса минимизации используется условие невязки:

$$S\approx\delta^2. \tag{10}$$

$$\delta^2=\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau^e}\Delta T^e(t,r_i)^2 dr, \tag{11}$$

где $\Delta T^e(t,r_i)$ – погрешность экспериментальных значений температуры.

Искомые температурные зависимости раскладываются в ряд по конечному числу базисных функций:

$$\lambda(T)=\sum_{m=1}^{M_\lambda}\lambda_m\cdot\psi_{\lambda_m}(T); \tag{12}$$

$$cq(T)=\sum_{m=1}^{M_C}C_m\cdot\psi_{C_m}(T), \tag{13}$$

где: λ_m, C_m – коэффициенты разложения; ψ_λ, ψ_C – базисные функции; M_C, M_λ – количество членов в разложении.

В качестве базисных функций часто используются кубический и линейный *B*-сплайны [12,13]. При этом искомые коэффициенты сплайна представляют собой значения теплофизических параметров материала образца в узлах сплайн-аппроксимации.

Разложение искомых зависимостей cq (*T*) и λ (*T*) по базисным функциям позволяет свести задачу (1) к задаче нахождения минимума функции M_C+M_λ переменных:

$$S=S(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{M_\lambda},c_1,c_2,...,c_{M_c})=\min. \tag{14}$$

Для решения этой задачи можно использовать, например, градиентный метод минимизации – метод Давидона-Флетчера-Пауэлла [9]. Значения компонент вектора градиента $\partial S/\partial\lambda_i$; $i=\overline{1,M_\lambda}$; $\partial S/\partial C_i$; $i=\overline{1,M_C}$ находятся из решения сопряженной задачи [12]. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла предусматривает нахождение минимума функции *S* вдоль выбранного направления поиска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пригода Б.А., Кокунько В.С.* Обтекатели антенн летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 340 с.
2. *Walton J.D.* Radome Engineering Handbook. – N.V.: Marcel Dekker, 1970. P. 520.
3. *Афанасьев М.С., Лучников П.А., Митягин А.Ю., Назаренко А.А., Чучева Г.В.* Особенности технологической совместимости формирования слоистых гетероструктур на основе углеродных и перовскитных пленок // Наноматериалы и наноструктуры - XXI век. 2012. Т. 3. № 1. С. 29-37.
4. *Рогачев А.А., Лучников П.А., Рогачев А.В.* Особенности формирования наноразмерных фторполимерных пленок из газовой фазы на начальной стадии роста // Наноматериалы и наноструктуры - XXI век. 2010. Т. 1. № 1. С. 35-44.
5. *Лучников П.А., Назаренко А.А., Рогачев А.А.* Фрактальность рельефа поверхности вакуумных полимерных пленок на основе 2CL-ППК // Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 1. С. 064-067.
6. *Бассет Х.Л.* Открытая СВЧ система с фокусировкой мощности для измерения комплексной диэлектрической проницаемости материалов при температурах выше 2000 °С // Приборы для научных исследований, 1971. Т. 42. № 2. С. 200–204.
7. *Лучников П.А., Трефилов Д.Н., Трефилов Н.А., Сигов А.С.* Волновая диэлькометрия материалов: монография / под ред. А.С. Сигова. М.: Научный мир, 2014. 300 с.
8. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. С. 216.
9. *Просунцов П.В., Резник С.В.* Определение теплофизических свойств полупрозрачных материалов // Инженерно-физический журнал. 1985. Т. 49. № 6. С. 971–976.
10. *Елисеев В.Н., Товстоног В.А.* Теоретические основы сложного теплообмена в элементах конструкций. – М.: МВТУ им. Баумана, 1982. С. 52.
11. *Просунцов П.В., Резник С.В.* Математическая модель коэффициентной обратной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачной рассеивающей среде // Известия Сибирского отд. АН СССР. Серия технческих наук. 1986. Вып. 2. № 10. С. 3–9.
12. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
13. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.